Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

Home

Archives

About

SiteXC

2D Poisson 方程与 Finite Element Method

上周上 Advanced Scientific Computing 的时候老板讲了 2D Poisson 的有限元法，用的是四边形等参数单元。他布置的作业是写第一类边界条件的求解器。由于我印象中 FEM 用三角网格比较多，因此自己又对照着写了三角形等参数单元的版本，以及把第三类边界条件的情况也做了出来。下面是一点笔记，主要包括计算用到的公式和方法。

求定解问题：

$$
\begin{aligned}
-\Delta u = f,\ (x,y) \in \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = g,\ (x,y) \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

这是一个第三边值问题（Robin CB，或者称为 general Neumann BC，因为 $\alpha = 0$ 时即为 Neumann BC）。记

$$S^1 = \{v| \iint_\Omega [v^2 + (\nabla^2 v)]dxdy < \infty\}$$

则上述定解问题有变分形式：求 $u \in S^1$ s.t.

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy + \int_{\partial\Omega} \alpha uvds = \iint_\Omega fvdxdy + \int_{\partial\Omega} gvds \qquad (1)$$

其中 u 可表示为 $u = \sum c_i \phi_i$.

等参数单元：三角形与四边形

为了处理方便，我将三角形单元和四边形单元都变换到标准单元上进行计算，并且只讨论最简单的情形：对三角形单元使用线性插值基函数，对四边形单元使用双线性插值基函数。

任意四边形变换到 $[-1,1] \times [-1,1]$ 上计算，变量替换为：

Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

$$x(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{4}x_k^eN_k(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{4}y_k^eN_k(\xi,\eta)$$

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

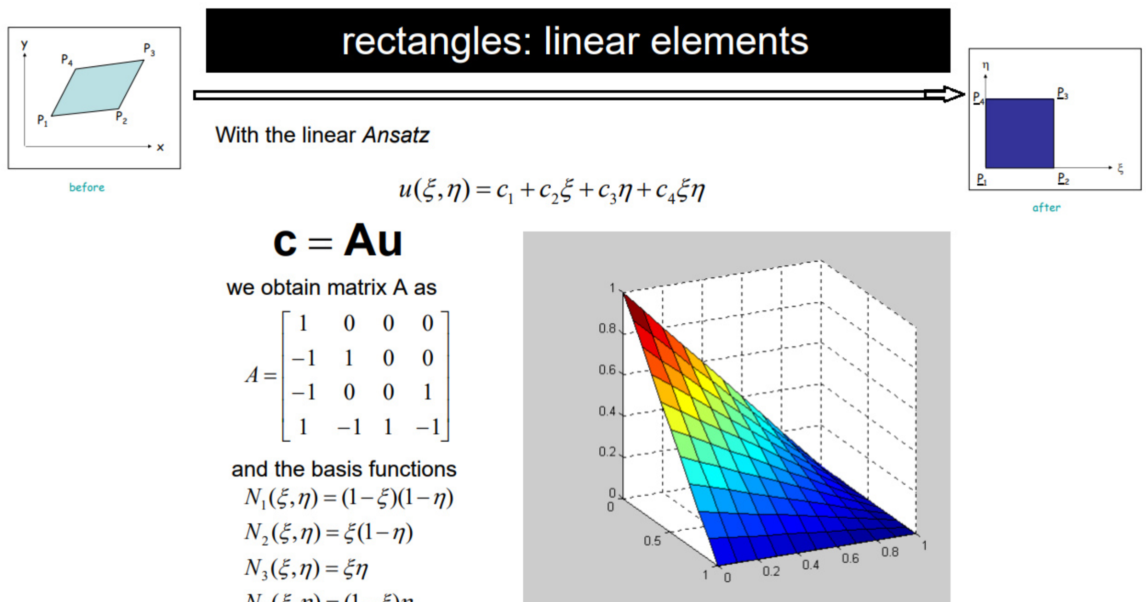
$$N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N(\xi,\eta)=\phi(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

其中 (x_k^e,y_k^e) 是四边形元中按逆时针顺序（下面所有的对单元结点的编号都是按逆时针顺序的）数第 k 个顶点在原求解域中的坐标，$N_k(\xi,\eta)$ 是标准单元上的四个插值基函数，ϕ 是试探空间的基函数。示意图如下：



任意三角形变换到 $(0,0)-(1,0)-(0,1)$ 三角形上计算，同理变量替换为：

$$x(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{3}x_k^eN_k(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{3}y_k^eN_k(\xi,\eta)$$

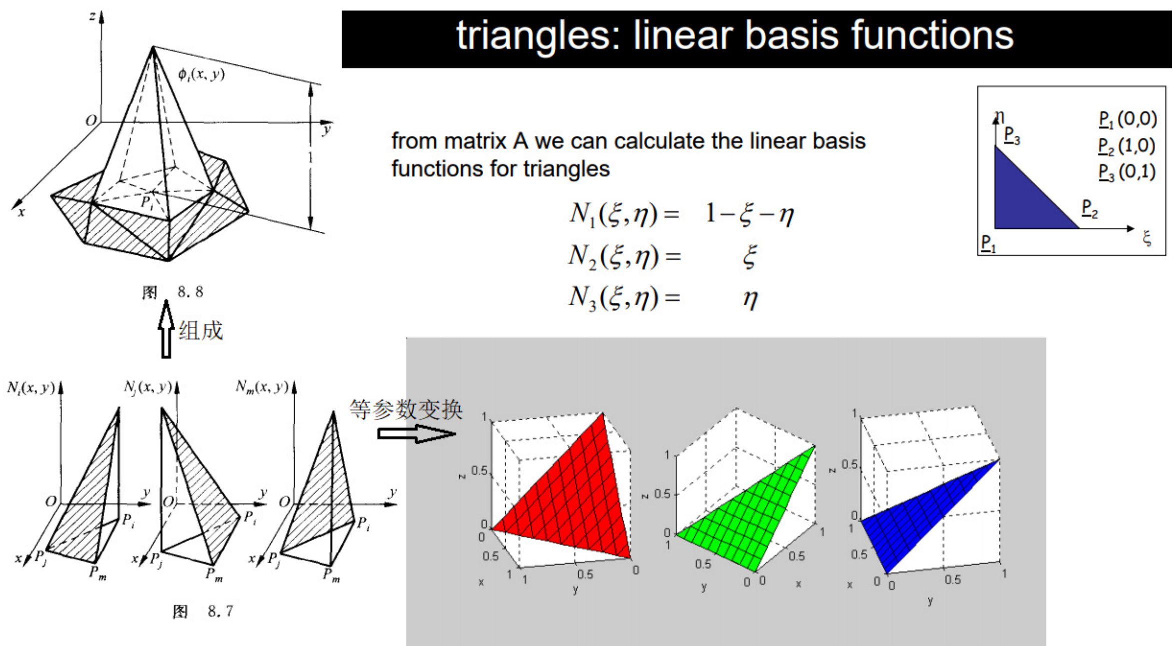
$$N_1(\xi,\eta)=1-\xi-\eta$$

$$N_2(\xi,\eta)=\xi$$

$$N_3(\xi,\eta)=\eta$$

$$N(\xi,\eta)=\phi(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

示意图如下：



变量替换以后，我们还需要处理一下二重积分以及偏导数的关系：

Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

Home

Archives

About

SiteXC

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^e}\left(\frac{\partial \phi_i(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \phi_j(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \phi_i(x,y)}{\partial y}\frac{\partial \phi_j(x,y)}{\partial y}\right)dxdy \\
&=\iint_{\Omega^{std}}\left(\frac{\partial N_a(\xi,\eta)}{\partial x}\frac{\partial N_b(\xi,\eta)}{\partial x}+\frac{\partial N_a(\xi,\eta)}{\partial y}\frac{\partial N_b(\xi,\eta)}{\partial y}\right)J(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\iint_{\Omega^e} f(x,y)\phi_i(x,y)dxdy=\iint_{\Omega^{std}} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))N_a(\xi,\eta)J(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad (3)
$$

$$
J(\xi,\eta)=det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \eta}/J(\xi,\eta)\\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial y}{\partial \xi}/J(\xi,\eta)\\
\frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\partial x}{\partial \eta}/J(\xi,\eta)\\
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}/J(\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

其中 Ω^{std} 表示变换到的标准单元。

有限元方程的形成

计算单元刚度矩阵和单元荷载向量

我们考虑在每一个单元上的积分，即对于 (1) 式，$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_n$ 考虑在每一个 Ω_e 上的积分。在每个单元上进行积分时，我们计算所有 $(\phi_i', \phi_j'), (\alpha\phi_i, \phi_j), (f, \phi_j), (g, \phi_j)$ 对的积分，等号左端形成的是 4×4 或者 3×3 的矩阵，称为单元刚度矩阵；等号右端形成的是 4×1 或者 3×1 的向量，称为单元负载向量。

首先考虑 (1) 式中等号两边的第一项，都是二重积分。用高斯求积计算二重数值积分的方法如下：对于 $[-1,1]\times[-1,1]$ 区域，选定高斯勒让德求积节点数 q, 二重积分为

$$
\iint f(x,y)dxdy \approx \sum_{ix=0}^{p}\sum_{iy=0}^{p} f(gp(ix),gp(iy))\cdot w(ix)\cdot w(iy) \quad (4)
$$

Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

Home

Archives

About

SiteXC

其中 $gp(), w()$ 分别是一维高斯勒让德节点和权重。

对于单位三角形，则使用更通用的形式（上式也可写成下式的形式）：

$$\iint f(x,y)dxdy \approx \sum_{iq=0}^{p} f(gpx(iq), gpy(iq)) \cdot w(iq) \quad (5)$$

其中 $(gpx(iq), gpy(iq))$ 是一个二维上的高斯节点，$w(iq)$ 是与之对应的权值。我使用四个高斯点：

(x, y)	w
(1/3, 1/3)	-27/96
(0.6, 0.2)	25/96
(0.2, 0.2)	25/96
(0.2, 0.6)	25/96

对于等号左侧第一项，给定一个高斯点 $(gpx(iq), gpy(iq))$, 我们可以计算这样一个矩阵（以四边形单元为例）：

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}$$

与此同时，$det = J(gpx(iq), gpy(iq))$ 也可以被计算出来。随后，我们只需要计算 $det \cdot S^T S$, 便可得到一个 4×4 的矩阵，即为方程 (2) 在 $(gpx(iq), gpy(iq))$ 这一点所有的 $(\frac{\partial N_a}{\partial x}\frac{\partial N_b}{\partial x} + \frac{\partial N_a}{\partial y}\frac{\partial N_b}{\partial y})J(\xi,\eta)$, $1 \le a, b \le 4$. 三角形单元同理，只是 S 变成 2×3. 将每个高斯点得到的矩阵加起来，即为所有的 $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y})$ 在对应的单元上的积分。

对于等号右侧第一项，我们只需先将 $f(x,y)$ 变换到单位单元上，再进行二重数值积分即可。

然后我们考虑 (1) 式等号左右两边的第二项。这两项都是在边界上的线积分。对单元上任意一条在 $\partial\Omega$ 上的边 $\overline{P_iP_j}$, 记其长度为 l, 我们在上面引入参数 t 为线段弧长，对应 P_i 点有 $t = 0$, P_j 点有 $t = l$. 如此，单位单元上的插值基函数都可以在 $\overline{P_iP_j}$ 上化为关于 t 的一次函数。因此我们有：

Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

Home

Archives

About

SiteXC

$$N_i|_{\overline{P_iP_j}} = 1 - \frac{t}{l}$$
$$N_j|_{\overline{P_iP_j}} = \frac{t}{l}$$
$$N_m|_{\overline{P_iP_j}} = 0, m \neq i, m \neq j$$

对于 $\alpha(x,y), g(x,y)$，在 $\overline{P_iP_j}$ 上有

$$\alpha(t) = \alpha(x_i + \frac{t}{l}\Delta x, y_i + \frac{t}{l}\Delta y), \Delta x = x_j - x_i, \Delta y = y_j - y_i$$

因此，对每一条在 $\partial\Omega$ 上的边，(1) 式左端第二项在给定单元上将得到一个 4×4 或者 3×3 的矩阵，其中只有4个非零元素；(2) 式右端第二项在给定单元上将得到一个 4×1 或者 3×1 的矩阵，其中只有2个非零元素。将所有在 $\partial\Omega$ 上的边的计算得到的矩阵或向量加起来，即为所有的 $(a\phi_i, \phi_j)$ 和 (g, ϕ_j) 在 $\partial\Omega \cap \Omega^e$ 上的线积分。

组装全局刚度矩阵和全局荷载向量

回顾 Galerkin 法，可知每一对 (ϕ'_i, ϕ'_j), (f, ϕ_j), $(a\phi_i, \phi_j)$ 和 (g, ϕ_j) 的结果都是属于第 j 条方程的；试探空间的每一个基函数 ϕ_j 都可以写成若干个单元上的插值基函数之和。因此，对于一个单元，若其按逆时针方向第 i 个顶点在整个网格中的编号为 $gvid_i$，那么其单元刚度矩阵的第 (i, j) 个元素应该被累加到全局刚度矩阵的第 $(gvid_i, gvid_j)$ 个元素上；其单元荷载向量的第 i 个元素应该被累加到全局荷载向量的第 $gvid_i$ 个元素上。

计算第一类边界问题

对于第一类边界问题（Dirichlet BC），只需将 (1) 中的 α 和 g 设为 0，即可消去 Robin BC 的限制。要添加 Dirichlet 边值的限制，即令 $c_i = u_i$。一个简单的方法是，将全局刚度矩阵的第 i 行第 j 个元素设为1，第 i 行其余元素设为0，并将全局荷载向量的第 i 个元素设为 u_i。如果将边界节点集中编号，那么可以直接划去对应的行和列，并且相应地修改右端项。

数值算例

我的代码在这里

第一类边界条件

Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

Home

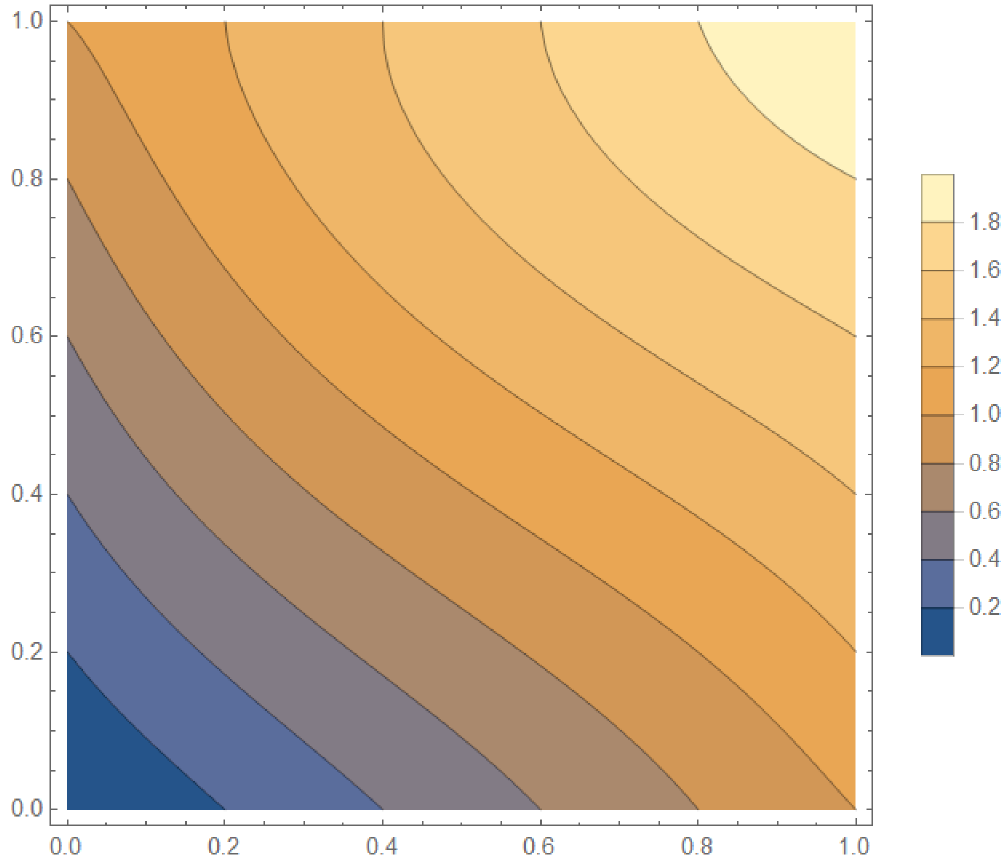
Archives

About

SiteXC

$$\nabla^2 u(x,y) = 3x - 6y, (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$
$$u(x,0) = x, u(x,1) = 1 + x, u(0,y) = y, u(1,y) = 1 + y$$

Mathematica 11 参考结果：



FEM 2D 四边形网格：

Rainmaker's Notebook

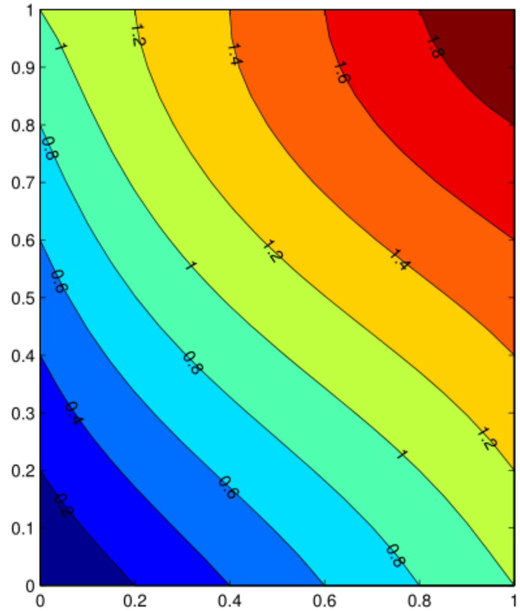
『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

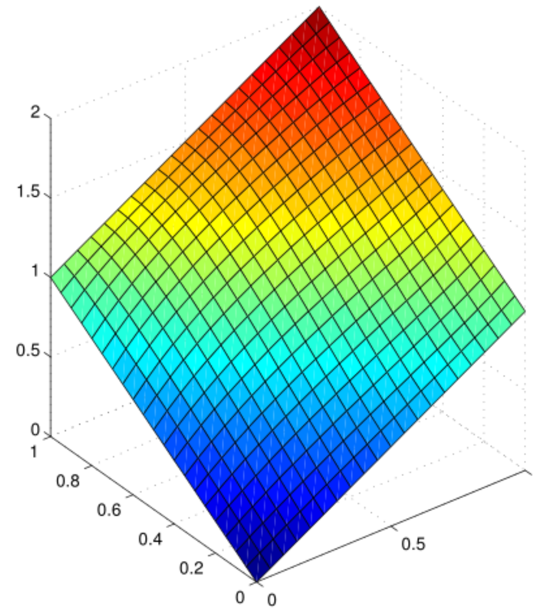
Home

Archives

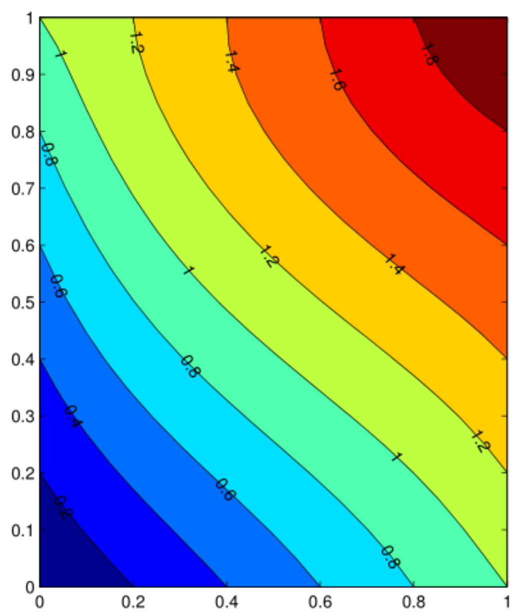
About

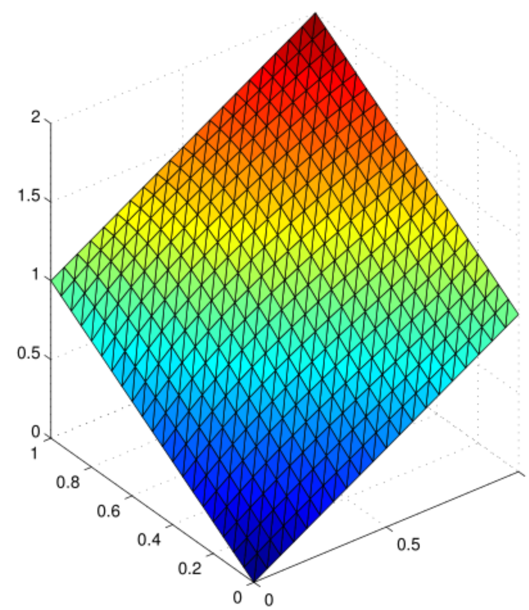
SiteXC





FEM 2D 三角形网格：





第三类边界条件

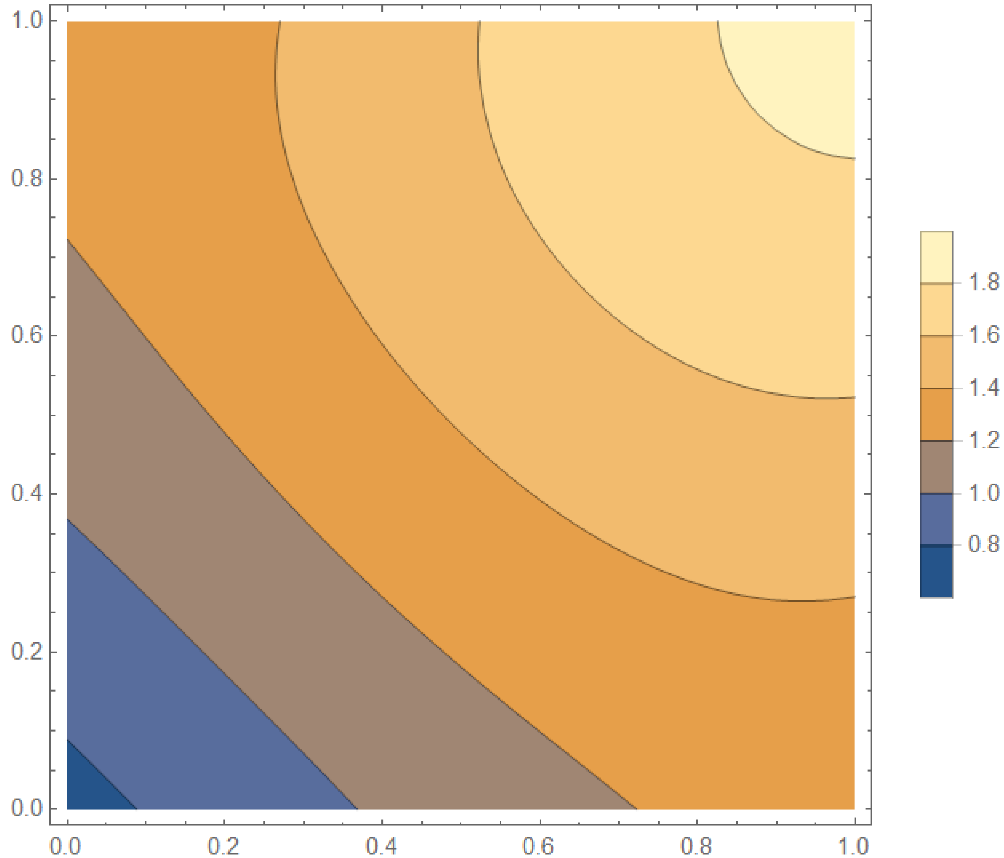
Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

$$\nabla^2 u(x,y) = 5xy, (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial \vec{n}} + u(x,y) = x + y$$

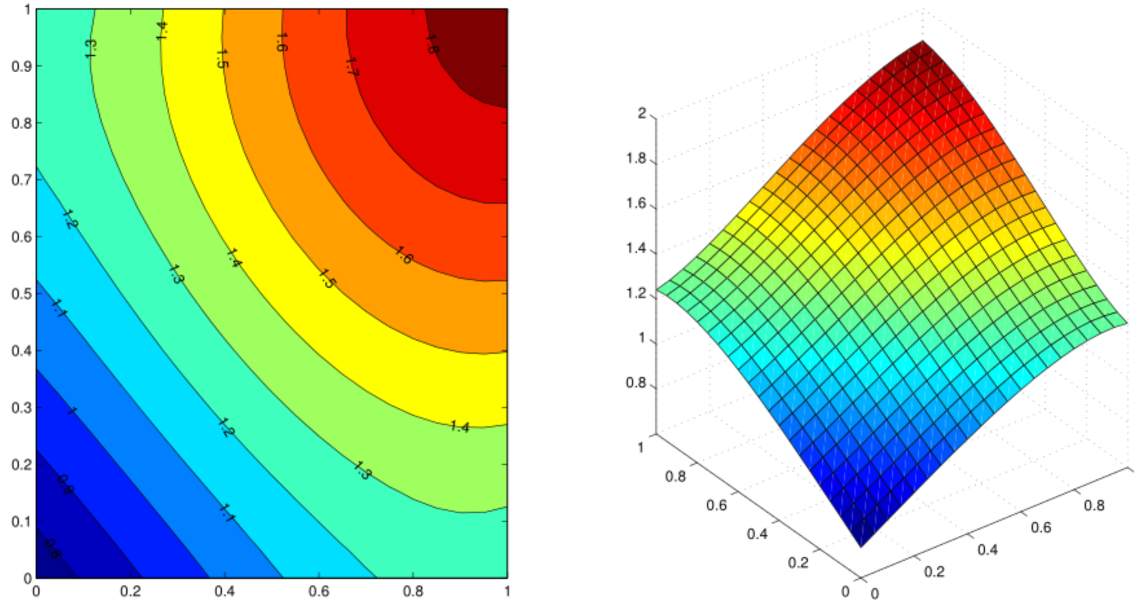
Mathematica 11 参考结果:



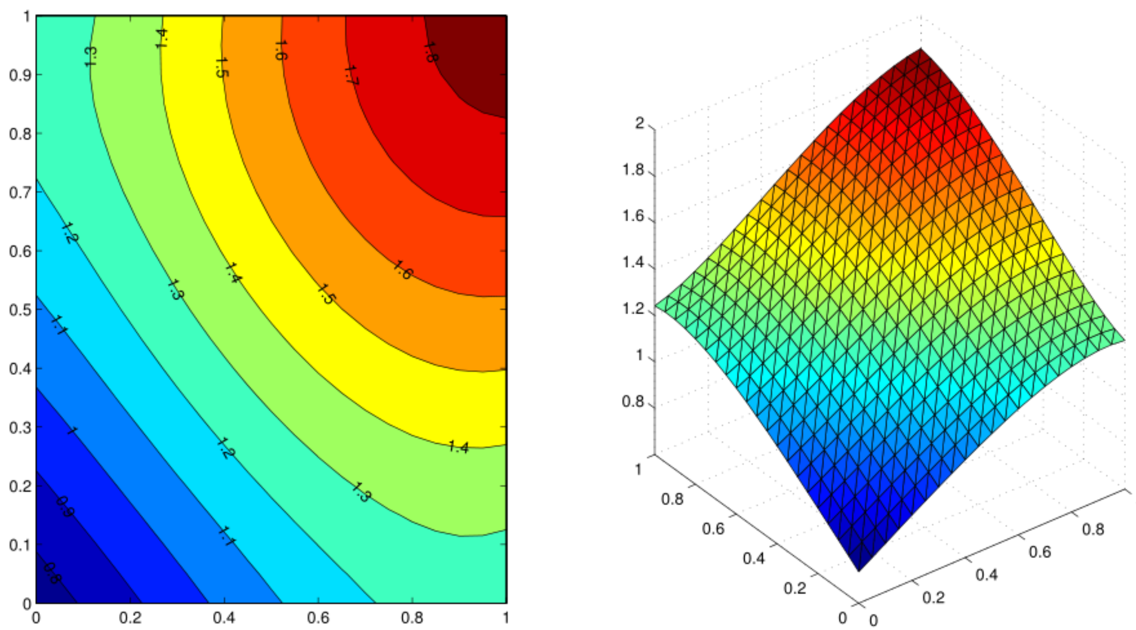
FEM 2D 四边形网格:

Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》



FEM 2D 三角形网格：



Rainmaker's Notebook

『求雨巫师的神奇之处在于他总是躲着不见你，却总说刚下完的雨是拜他所赐。』——《天真的人类学家》

Reference

1. 陆金甫，关治，《偏微分方程数值解法（第二版）》，清华大学出版社
2. Finite Elements: Basis Functions
3. Formulation of FEM for Two-Dimensional Problems

发布于 2018-02-04 / tags: { LinearAlgebra } { PDE }

Related Issues not found

Please contact @EnigmaHuang to initialize the comment

Login with GitHub

Home

Archives

About

SiteXC